ИНОВАЦИИ В ГОРСКАТА ПРОМИШЛЕНОСТ И ИНЖЕНЕРНИЯ ДИЗАЙН, 1/2012 (1): 167–173

МОДЕЛ ЗА ЯКОСТНО И ДЕФОРМАЦИОННО ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ГАТЕРНА РАМКА С ОТЧИТАНЕ НА СКЪСЯВАНЕТО НА СТОЙКИТЕ

Стефан Стефанов
Лесотехнически университет – София, e-mails: stefanov_sh@abv.bg, stefanst@ltu.bg

РЕЗЮМЕ

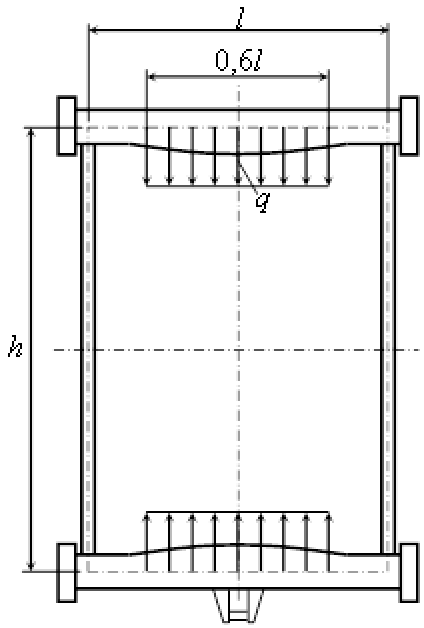
В традиционната литература по дървообработващи машини се предлага модел за якостно и деформационно изчисляване на гатерна рамка, който е излишно опростен: всяка от двете греди на рамката се разглежда като греда на две ставни опори, в ролята на които са гатерните стойки. Но връзките между гредите и стойките са твърди, а не ставни, и гатерната рамка определено трябва да се разглежда тъкмо като рамка с корави възли. В курса по съпротивление на материалите има класическа тема за разкриване на вътрешната статична неопределимост на затворена рамка с корави ъгли. В преподаването и при писането на учебни помагала авторът винаги е посочвал, че гатерната рамка е много подходящ пример към въпросната тема. В първия авторов учебник по съпротивление на материалите бе демонстрирано разкриването на статичната неопределимост на подобна рамка въз основа на енергетичните методи. По класически начин се предвиждаше участие само на огъващия момент при образуването на потенциалната енергия на деформациите. Съответна изчислителна схема бе съставена и пренесена в книга на проф. Обрешков. Сега се предлага по-точен изчислителен модел, в който в потенциалната енергия на деформациите участва и натисковото усилие в стойките, и съответно се намесва тяхното скъсяване. Освен разкриването на статичната неопределимост се извежда и израз за деформационното сближаване на средните сечения на двете греди. Работата хвърля светлина върху въпроса доколко е обосновано опростяването всяка от двете греди на рамката да се разглежда като греда на две ставни опори.

Ключови думи: гатерна рамка, вътрешна статична неопределимост на затворена рамка, потенциална енергия на деформациите

УВОД

На фиг. 1 е показан опростен равнинен изчислителен модел на гатерна рамка, който се загатна в (Стефанов 1989), възприе се в (Обрешков 1995) и допълнително се разработи в (Обрешков и Стефанов 1999). В състава на рамката влизат горна и долна хоризонтални греди, чиито напречни сечения имат приблизително еднакъв осреднен инерционен момент J. Гредите са свързани с гатерни стойки – вертикалните участъци на рамката. Гатерните стойки са доста по-тънки от гредите: сеченията им имат инерционен момент kJ, където $k < 1$. Между гредите са опънати лентови триони. Натоварването от тях е представено като две равни и противопосочни разпределени сили с гъстота q. При това положение рамката има показаните две оси на геометрична и силова симетрия. Всяко друго усложняване на модела с цел да се направи поблизък до реална гатерна рамка ще увеличи степента на статичната неопределимост, но ще следва пак основните моменти на изложението по-долу.

В традиционната за ФГП литература по дървообработващи машини (Филипов 1977), след подобни опростявания, за якостното и деформационно изчисляване на рамката се предлага всяка от двете ѝ греди да се разглежда като греда на две ставни опори. Но едно такова допълнително опростяване буди недоумение: връзките между гредите и стойките са твърди, а не ставни. Във всеки курс по съпротивление на материалите, вкл. (Стефанов 2007), има класическа тема за разкриване на вътрешната статична неопределимост на затворена рамка с корави ъгли (възли). Така вкарването на стави в изчислителния модел изглежда излишно: гатерната рамка определено трябва да се разглежда тъкмо като рамка с корави възли. Нещо повече: в преподаването и при писането на учебни помагала по съпротивление на материалите авторът винаги е посочвал гатерната рамка като много подходящ пример към въпросната тема.



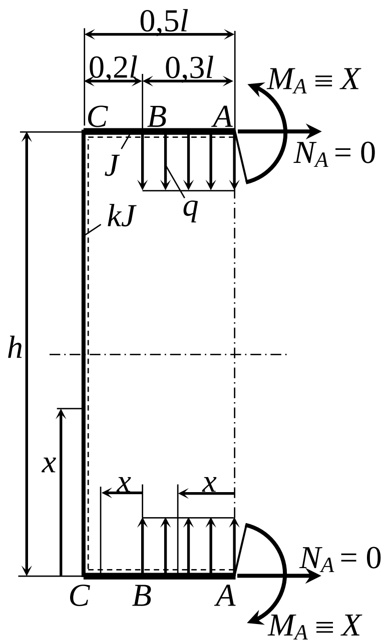
Фиг. 1. Гатерна рамка

В първия авторов учебник (Стефанов 1989) е демонстрирано разкриването на статичната неопределимост на затворена рамка, подобна на фиг. 1, въз основа на енергетичните методи в съпротивление на материалите. По класически начин се предвижда участие само на огъващия момент $M \equiv M_y$ при образуването на потенциалната енергия на деформациите U. Проф. Филипов имаше (неосъществено) намерение за включване на съответна изчислителна схема в следващо издание на учебника му. Такава бе съставена и пренесена в (Обрешков 1995) и допълнително бе анализирана в (Обрешков и Стефанов 1999). Универсалното условие $\partial U/\partial X = 0$ (Стефанов 2007) за разкриването на статичната неопределимост бе развито по силовия метод с използване на графоаналитичното правило на Верешчагин (Стефанов 1989).

От свой преподавателски опит в САЩ през 2002 г., както и от последвали наблюдения в страни от Европейския съюз, авторът се увери, че до правилото на Верешчагин не се стига. „Свиването" на учебните планове и програми оставя условието $\partial U/\partial X = 0$ в рамките „по Кастиляно" или „по Максвел-Мор". Такова е и сегашното положение в учебната програма по съпротивление на материалите във ФГП. Съответно настоящата работа представлява една актуализация в сравнение с (Обрешков и Стефанов 1999). Но по-важното е, че тук се продължава с един по-точен модел за деформационно изчисляване на рамката: заради стойности на k доста по-малки от 1, в потенциалната енергия на деформациите трябва да участва и натисковото нормално усилие $N \equiv N_x$ в стойките.

1. РАЗКРИВАНЕ НА СТАТИЧНАТА НЕОПРЕДЕЛИМОСТ

На фиг. 2 е показана (половин) еквивалентна система (Стефанов 2007) за разкриване на статичната неопределимост. Чрез двете сечения A е отделена лявата половина на рамката. Понеже тези сечения са по вертикалната ос на симетрия, в тях двете тангенциалните (срязващите) усилия Q_z са нули. Остават ненулеви двата огъващи момента и (по принцип) двете нормални усилия. Ако нямаше втора ос на симетрия (хоризонталната), двата огъващи момента и двете нормални усилия щяха да имат различни големини и означения. От общо четирите вътрешни усилия щяха да останат статично неопределими един огъващ момент и едно нормално усилие. Системата щеше да е два пъти вътрешно статично неопределима („вътрешно“ означава „по отношение на вътрешните усилия“). Това трябва да се има предвид, ако моделът се приближи повече до реална гатерна рамка с цената на усложняване и загуба на хоризонталната ос на симетрия. Но сега тази ос е налице и налага симетричност на горните и долни N_A и M_A. Това ще рече, че двете N_A са равни и еднопосочни, а двата M_A – равни и противопосочни.



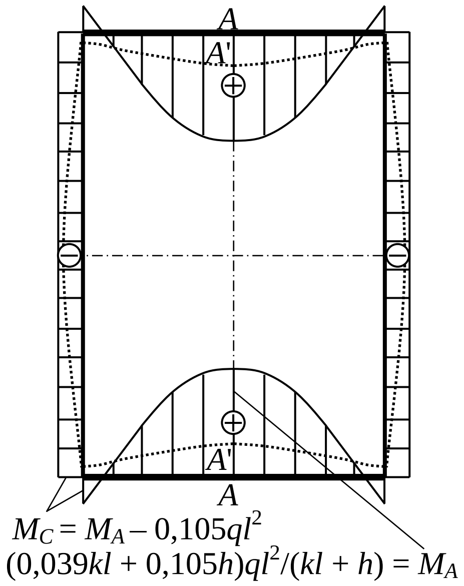
Фиг. 2. Еквивалентна система

Тогава усилието N_A става статично определимо от условието за равновесие на хоризонталните сили $\Sigma H_\mathrm{i} = 0$. В случая, заради липсата на активни хоризонтални сили, $\Sigma H_\mathrm{i} = 2N_A = 0$ води до $N_A = 0$. Двата момента M_A се съкращават във всяко моментово условие за равновесие, така че общата им големина остава като (единствена) вътрешно статично неопределима величина X (до този извод се стига и при всяка друга подобна затворена рамка с две оси на геометрична и силова симетрия). Съответно $\partial U/\partial X = 0$ означава, че е нула относителното завъртане на двете сечения, към които са приложени двата момента X: $\Delta\alpha_{AA} = 0$

Нека се развие $\partial U/\partial X = 0$ по Кастиляно (Стефанов 2007). Според избраната реперна линия, участъците започват да се броят и обхождат, започвайки от A отдолу. За участъка AB: $M_y = X - qx^2/2$, $\partial M_y/\partial X = 1$. За BC: $M_y = X - q0{,}3l(0{,}15l + x) = X - 0{,}045ql^2 - 0{,}3qlx$, $\partial M_y/\partial X = 1$. За CC: $M_y = X - q0{,}3l0{,}35l = X - 0{,}105ql^2$, $\partial M_y/\partial X = 1$. Дотук е достатъчно – предстоящите за съставяне интеграли по Кастиляно могат да се ограничат върху една четвърт от рамката и да се умножат по 4, за да се обхване цялата рамка. Но множителят 4 всъщност не е нужен в $\partial U/\partial X = 0$ – той се съкращава. Съкращават се също модулът на еластичност E и J (остава k). Така $\partial U/\partial X = \int_0^{0,3l}(X - 0{,}5qx^2)1\mathrm{d}x + \int_0^{0,2l}(X - 0{,}045ql^2 - 0{,}3qlx)1\mathrm{d}x + (1/k)\int_0^{0,5h}(X - 0{,}105ql^2)1\mathrm{d}x = 0$. Оттук се получава

$$X \equiv M_A = \frac{(0{,}039kl + 0{,}105h)ql^2}{kl + h}. \quad \textbf{(1)}$$

Този резултат остава същият и ако се направи опит в $\partial U/\partial X = 0$ да се включат интегралите по Кастиляно с участието на нормалното усилие $N_x(x)$ заради голямата деформируемост на тънките гатерни стойки спрямо това усилие. Наистина, в стойките важи $N_x(x) = -0{,}3ql = \mathrm{const}$, при което $\partial N_x/\partial X = 0$ и интегралите с $N_x(x)$ се нулират.



Фиг. 3. M_y-диаграмата и деформирането на рамката

Резултатът (1) може да се получи и по силовия метод с използване на интегралите по Максвел-Мор (Стефанов 2007).

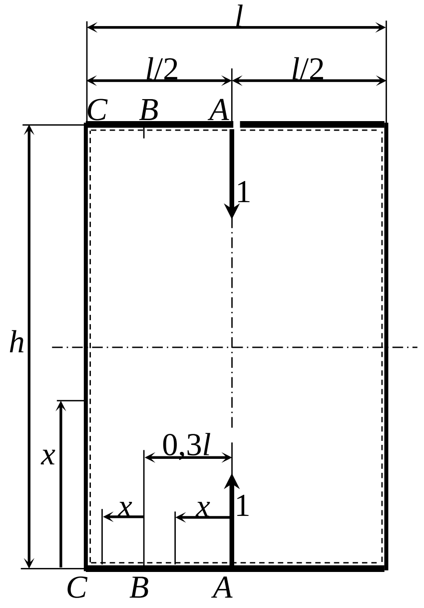
От (1) и от написаните по-горе изрази за $M_y(x)$ се получава необходимата за якостни изчисления M_y-диаграма, показана на фиг. 3. Гатерните стойки са натоварени с постоянен огъващ момент M_y, с $Q_z = 0$ и с постоянен натиск $N_x = -0{,}3ql$ (което е равностойно на ексцентричен натиск). Огъващият момент в коравите възли (ъглите) C (вж. и фиг. 2), същевременно в гатерните стойки, е $M_C = M_A - 0{,}105ql^2 \neq 0$ (същият щеше да е нула, ако се приеме, че възлите C са ставни).

На фиг. 3 е илюстрирано и деформирането на рамката, където е характерно скъсяването на гатерните стойки. Иначе, при не толкова голяма разлика в коравините на гредите на подобна рамка, важи правилото, че огъвани греди практически не се удължават или скъсяват от N_x в тях, действащо наред с M_y. Но сега скъсяването на стойките от натиска се очаква съизмеримо с провисването им от огъването и споменатото правило не важи (както не важи и при ексцентричен натиск с малък ексцентрицитет). Очертана на фиг. 3 еластична линия на рамката (точкуваната крива) е с посока на изпъкналостта, следваща разположението на M_y-ординатите.

Съществено е, че при $k \to 0$ от (1) се получава $M_A = 0{,}105ql^2$. Същият резултат излиза от $\Sigma M_{\mathrm{i},C} = 0$, ако възлите C на фиг. 2 се приемат за ставни. Така се добива представа за грешката, която се допуска при поставянето на всяка от гредите на гатерната рамка върху ставни опори (Филипов 1977): грешката е от порядъка на разликата между (1) и $M_A = 0{,}105ql^2$. Колкото по-малко е k – отношението между инерционните моменти на сеченията на стойките и гредите, толкова стойките са по-близо до ролята на ставни опори на гредите. Съответно толкова по-изчистен от огъване е натискът в тях: при $k \to 0$ огъващият момент в стойките $M_C = M_A - 0{,}105ql^2$ също $\to 0$ и те се превръщат в чисто натиснати пръти вместо огъвани греди.

2. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ДЕФОРМАЦИОННОТО СБЛИЖАВАНЕ НА СРЕДНИТЕ СЕЧЕНИЯ НА ГРЕДИТЕ

Колкото до деформационното изчисляване на гатерната рамка, сближаването на двете сечения A до положенията A' (фиг. 3) е от интерес във връзка с монтажното опъване на трионите (Филипов 1977). Това деформационно сближаване (разлика между отсечките AA и $A'A'$) представлява вертикално относително (взаимно) деформационно преместване $\Delta\delta_{AA}$. То може да се определи като сума от интеграли на Кастиляно. За целта при двете сечения A на фиг. 2 трябва да се поставят две равни и противопосочни фиктивни сили. Другият вариант на решение (предпочетен тук) е да се работи с допълнителна т.нар. единична система (Стефанов 2007): еквивалентната система (фиг. 2) се освобождава от нейното натоварване, а при двете сечения A се поставят две равни и противопосочни сили с големина 1 (фиг. 4). След това $\Delta\delta_{AA}$ се образува като сума от интеграли на Максвел-Мор.



Фиг. 4. Единична система

Междувременно еквивалентната система може да се преобразува за удобство по безброй начини (Стефанов 2007). Например на фиг. 2 затворената рамка е „отворена" и при двете сечения A (като е спестено изобразяването на дясната половина), а на фиг. 4 е направен само един „отвор" при горното сечение A. Въобще при деформационно изчисляване е за предпочитане да се изобразява цялата рамка със само един отвор в нея. При това той може да се покаже на фиг. 4 където да е по дясната половина на рамката, без това да влияе на начина на решението по-долу.

Преместването $\Delta\delta_{AA}$ като сума от интеграли на Максвел-Мор (Стефанов 2007), в случая включително интеграли с N_x в тънките гатерни стойки, е

$$\Delta\delta_{AA} = 2(EJ)^{-1}\int_0^{0,3l} M_y(x)M_y^{(1)}(x)\mathrm{d}x + 2(EJ)^{-1}\int_0^{0,2l} M_y(x)M_y^{(1)}(x)\mathrm{d}x + 2(EkJ)^{-1}\int_0^{0,5h} M_y(x)M_y^{(1)}(x)\mathrm{d}x + 2(EA)^{-1}\int_0^{0,5h} N_x N_x^{(1)}\mathrm{d}x.$$

Тук M_y и N_x са в еквивалентната система (фиг. 2), а $M_y^{(1)}$ и $N_x^{(1)}$ – в единичната система (фиг. 4). Множителят 2 при интегралите се появява поради следното съображение: достатъчно е да се разглежда само долната лява четвъртина на рамката и чрез умножаването по две се обхваща лявата половина; а дясната половина е с нулеви $M_y^{(1)}$ и $N_x^{(1)}$, както се разбира от фиг. 4.

Изразите на M_y в участъците AB, BC и (половината) CC бяха вече приведени по-горе. Беше също намесен изразът –0,3ql на N_x в (половината) участък CC. Сега, за фиг. 4, в участъка AB важи $M_y^{(1)} = -1x$; в участъка BC е $M_y^{(1)} = -1(0,3l + x)$; в (половината) участък CC са $M_y^{(1)} = -1.0,5l$ и $N_x^{(1)} = -1$. Следва заместване в горната сума на интегралите и тяхното решаване. След редица математически операции излиза резултат, представен в следния вид:

$$\Delta\delta_{AA} = \frac{-0,25Xl^2 + 0,014425ql^4}{EJ} - \frac{0,5Xlh}{EkJ} + \frac{0,0525ql^3h}{EkJ} + \frac{0,3qlh}{EA}, \qquad (2)$$

където $X \equiv M_A$ се дава от (1); A е лицето на сечението на стойките; модулът E на линейните деформации е приет еднакъв за гредите и стойките.

Последното събираемо $0,3qlh/(EA)$ в (2) представлява деформационното скъсяване на стойките от натиска $N_x = -0,3ql$ в тях. В първо приближение би могло да се отчита само това събираемо, ако се приеме, че гредите на рамката са недеформируеми ($J \to \infty$). Друг граничен случай е $k \to \infty$, когато $X \equiv M_A$ става $0,105ql^4$. Тогава второто и третото събираемо в (2) се съкращават. Това не значи, че се отива на схемата (Филипов 1977) със ставни възли в двата края на гредите: тази схема означава доста по-различно деформиране в сравнение с разгледания модел с корави възли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разкри се статичната неопределимост на модел на гатерна рамка тъкмо като затворена рамка с корави възли. Определи се деформационното сближаване на средните сечения на гредите на рамката. За целта се постъпи така, както се очаква в системата на висшето техническо образование – приложиха се енергетичните методи от „Съпротивление на материалите“. Бе оценено като не съвсем уместно традиционното в учебната литература по дървообработващи машини разглеждане на гредите на рамката като свързани между ставни възли и съответното разглеждане на гатерните стойки като само натиснати пръти без тяхно огъване. Ако се продължава с такова преподаване относно якостните и деформационни изчисления на гатерна рамка, трябва да се пояснява на студентите, че по-точни изчисления изискват приложение на знанията от „Съпротивление на материалите“ за вътрешно статично неопределими затворени рамки без ставни възли в тях. Съответно могат да се препоръчват отпратки към настоящата статия или към компютърни програми, прилагащи метода на гредови крайни елементи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обрешков П. 1995 г. Дървообработващи машини. Изд. къща БМ, София.
2. Обрешков П., С. Стефанов 1999 г. Метод за оразмеряване на гатерна рамка. Научни трудове на ВЛТИ, том XXXVIII: 225–231.
3. Стефанов С. 1989 г. Съпротивление на материалите. Печатна база към МНП, София.
4. Стефанов С. 2007 г. Съпротивление на материалите. Изд. къща на ЛТУ – София.
5. Филипов Г. 1977 г. Дървообработващи машини. Земиздат, София.

A MODEL FOR STRENGTH AND DEFORMATION CALCULATION OF SAW-BLADE FRAME WITH TAKING INTO ACCOUNT THE COMPRESSION OF THE VERTICAL FRAME’S STANDS

Stefan Stefanov

University of Forestry – Sofia, e-mails: stefanov_sh@abv.bg, stefanst@ltu.bg

ABSTRACT

In traditional textbooks in woodworking machines, a model is suggested for strength and deformation calculation of a saw-blade frame which is superfluously simplified: each of the two beams of the frame is considered as a simple one on two articulated supports that are swivels of the vertical frame’s stands. However, the joints between the beams and the stands are not articulated but rigid. Therefore, the saw-blade frame should be definitely considered namely as a frame with rigid joints. In the textbooks in Strength of Materials, there is a classical theme about solving internally statically indeterminate closed frame with rigid joints. The author has always stated while teaching and writing textbooks that the saw-blade frame is a very suitable example to the classical theme mentioned. In the first author’s textbook in Strength of Materials, the solution of the statically indeterminate scheme of a similar frame has been demonstrated based on the strain-energy methods. Following the classical manner, the internal bending moment has only been envisaged while the strain energy is composed. A corresponding calculation scheme has been created and adopted in a book of Professor

Obreshkov. Now, a more precise calculation model is proposed taking also into account the compression of the stands while the strain energy is formed. Correspondingly, deformational shortening the stands is involved. Besides the solutions of the statically indeterminate problem, an equation has been deduced for the deformational shortening the distance between the mean cross sections of the two beams. The paper throws light on the question of how well-grounded the simplification is to consider each of the two beams as a simple one on two articulated supports.

Key words: saw-blade frame, internally statically indeterminate closed frame, strain energy